

Le principe de moindre action permet d'inclure dans le formalisme Lagrangien aussi des contraintes qui sont difficiles à traiter par coordonnées généralisées.

Rappel: Théorème des extremaux liés

Si on veut minimiser une fonction de plusieurs variables $f(x, y)$ soumise à une contrainte $g(x, y) = 0$ on minimise la fonction

$$\tilde{f}(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

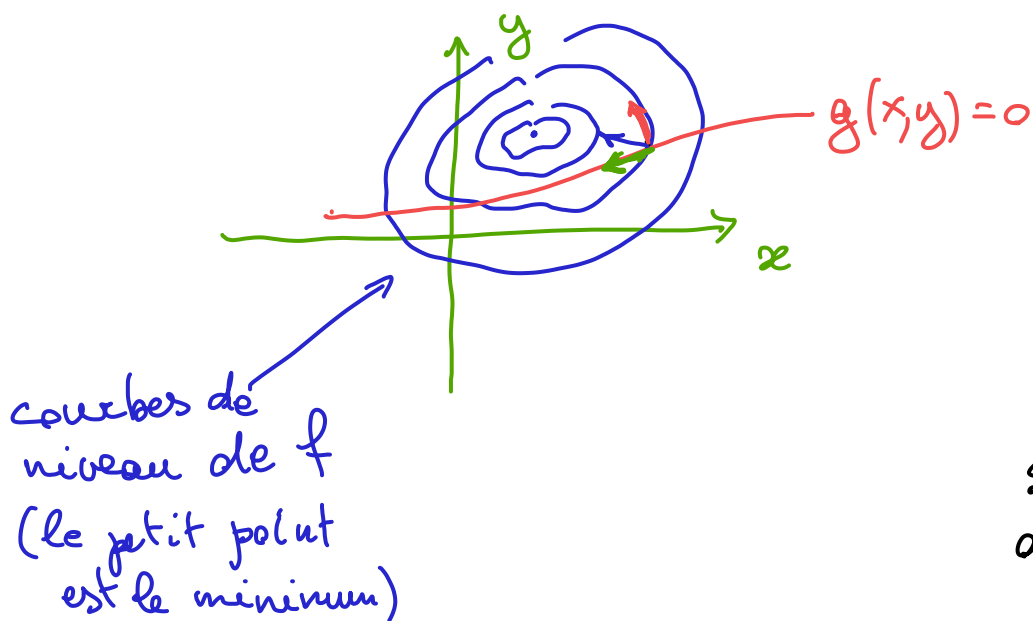
↑
multiplicateur de Lagrange

Donc on doit résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{la solution} \\ \text{donne} \\ x(\lambda) \text{ et } y(\lambda), \\ \text{qu'on met dans la} \\ \text{troisième pour trouver } \lambda \text{ qu'on remet dans} \\ x(\lambda) \text{ et } y(\lambda) \end{array} \right.$$

Pourquoi on suit cette procédure ?

On le comprends graphiquement :



Il faut chercher le minimum de f sur la courbe rouge.

Le gradient de f est un vecteur $\perp$ aux courbes de niveau (flèche bleu). Si on le suit on arrive au min de f .

Mais on sortait de la courbe rouge. Donc il faut retirer la composante orthogonale à la courbe rouge (flèche rouge), dont la direction est donnée par le gradient de $g(x, y)$ [la courbe rouge est une courbe de niveau pour $g(x, y)$!]. On ne connaît pas la longueur de la composante, mais sa direction oui. Donc le vecteur vert, qui va vers le minimum tout en restant sur la courbe rouge, est

$$\vec{\nabla} f - \lambda \vec{\nabla} g \quad (\lambda \text{ à déterminer})$$

ou, autrement dit

$$\vec{\nabla} (f - \lambda g) = \vec{\nabla} \tilde{f}$$

Lorsque ce vecteur est nul, on est au minimum de f sur une courbe de niveau de g . Il faudra seulement s'assurer qu'on soit sur la bonne ($g=0$), en fixant λ .

Tout ça on le généralise au cas de plusieurs dimensions et plusieurs contraintes

Fin Rappel.

Disons qu'on ait k contraintes $f_j(\{\vec{r}_i\}, t) = 0 \quad j=1, \dots, k$ tellement compliqués qu'on arrive pas à trouver des coordonnées généralisées.

Bien évidemment, si $f_j = 0$, alors $\lambda_j f_j = 0$ et aussi

$$\sum_j \lambda_j f_j(\{\vec{r}_i\}, t) = 0$$

Aussi son integrale :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_j \lambda_j f_j(\{\vec{r}_i\}, t) \right] dt = 0$$

Donc on peut le considerer comme une contrainte et dire qu'il ne faut pas minimiser l'action S , mais le fonctionnelle

$$\tilde{S} = \int_{t_1}^{t_2} L(\{\vec{r}_i\}, \{\dot{\vec{r}}_i\}, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^k \lambda_j f_j(\{\vec{r}_i\}, t) dt$$

Les equations d'Euler - Lagrange sont ainsi :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial r_i} + \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial r_i} = 0$$

En effet, il s'agit de la formulation originale du probleme des contraintes : il faut à chaque instant relever la composante de la force appliquée qui est normale à la contrainte. Ici on voit bien que, une fois les λ_j déterminés, la force de la contrainte pour la coordonnées r_i est $R_j = - \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial r_i}$

Bien évidemment il faut être flexibles: peut-être que certaines contraintes mènent à des coordonnées généralisées, et que les contraintes qui restent il faut les traiter comme montré ci-dessus.

Aussi, dans certaines limites, on peut inclure des contraintes qui ne sont pas holonomes.

L'utilité de cette formulation, quand même, est qu'elle offre la possibilité de résoudre des problèmes où la contrainte apparaît déjà en forme intégrale

$$\int_{t_1}^{t_2} g(\vec{r}_i, t) dt$$

$$\Rightarrow \tilde{S} = \int_{t_1}^{t_2} L dt + \lambda \int_{t_1}^{t_2} g(\vec{r}_i, t) dt$$

Important : Le calcul variationnel est très important, même avec contraintes intégrales.

Exercises, exercises, exercises !!!

